যোগের সূত্র দিয়ে জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় (Probability calculus of complex event by Addition Theorem)

A. বিসংবাদী ঘটনার সম্ভাব্যতা (Probability of Exclusive events)

1. একটি মুদ্রা ছুঁড়লে হেড অথবা টেল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

[এখানে Head অথবা Tail পড়া হল বৈকল্পিক ঘটনা অর্থাৎ (a or b) Head পড়া এবং Tail পড়া দুটো পরস্পর বিসংবাদী ঘটনা কারণ মুদ্রা ছুঁড়লে Head-এর দিক পড়লে Tail-এর দিক পড়তে পারে না। জটিল ঘটনা (a or b)-র সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে গেলে আগে a-র অর্থাৎ Head আলাদা করে পড়ার সম্ভাব্যতা এবং b-র অর্থাৎ Tail পড়ার সম্ভাব্যতা বার করতে হবে। তারপর দুই সম্ভাব্যতার ফলকে যোগ করলে a or b অর্থাৎ Head অথবা Tail পড়ার সম্ভাব্যতা নির্ণিত হবে]

মুদ্রাটির Head পড়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$

„ Tail „ „ $\frac{1}{2}$

মুদ্রাটির Head অথবা Tail পড়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

এই ধরনের সম্ভাব্যতাকে সমসম্ভাব্যতা (Equipossible) বলে অর্থাৎ যেখানে দুটি বিকল্পের সম্ভাব্যতাই সমান।

$\therefore$ একটি মুদ্রা ছুঁড়লে Head অথবা Tail পড়ার সম্ভাব্যতা = 1 **(Ans.)**

2. একটি তাসের প্যাকেট থেকে একটি তাস তুলে নিলে 2 অথবা 10 নম্বর তাস হবার সম্ভাব্যতা কত?

[তাসের প্যাকেটে চারটি আকারের প্রত্যেক আকারেই একটি করে 2 এবং 10 নম্বর যুক্ত তাস আছে, সুতরাং এখানে 2 এবং 10 নম্বর তাসের প্রত্যেকটির অনুকূল ফল হল—4]

এবার টানা তাসটির 2 হবার অনুকূল ফল—4

„ „ মোট বিকল্প—52 (প্যাকেটে মোট 52টি তাস থাকে)

$\therefore$ তাসটির 2 হবার সম্ভাব্যতা — $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

আবার

টানা তাসটির 10 হবার অনুকূল ফল—4

„ „ মোট বিকল্প—52

$\therefore$ তাসটির 10 হবার সম্ভাব্যতা— $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

সুতরাং তুলে নেওয়া তাসটির 2 অথবা 10 নম্বর তাস হবার সম্ভাব্যতা

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1+1}{13}=\frac{2}{13}$$ **(Ans.)**

(1) লুডোর ঘুঁটি একবার চাললে 5 অথবা 6 ওঠার সম্ভাব্যতা

(2) একটি তাসের লাল অথবা কালো রং হবার সম্ভাব্যতা

(3) বলের থলি থেকে বল নিলে সেটির লাল অথবা নীল হবার সম্ভাব্যতা ইত্যাদি।

এই ধরনের সব প্রশ্নের উত্তরে এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়।

B. অবিসংবাদী ঘটনার সম্ভাব্যতা (Probability of Non-exclusive events)

যখন দুটি বিকল্প একই সাথে ঘটতে পারে তখন ঘটনা দুটিকে অবিসংবাদী বলা হয়। যেমন ঃ অন্তত একটি টেক্কা ওঠা—এ কথার মানে একের বেশি টেক্কাও উঠতে পারে কিন্তু একের কম উঠবে না (অর্থাৎ টেক্কা উঠবেই না, এমন হবে না)। **যেসব ঘটনা 'অন্তত এক' (at least one)। এই কথাগুলি দিয়ে প্রকাশিত হয় সেগুলি অবিসংবাদী ঘটনা।**

অবিসংবাদী ঘটনা যদিও বৈকল্পিক ঘটনার অন্তর্গত কিন্তু এখানে সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে গেলে আদপেই যোগের সূত্র প্রয়োগ করা হয় না। এখানে সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা হয় গুণের পদ্ধতির ওপর বিয়োগের পদ্ধতি প্রয়োগ করে।

'অন্তত একবার ঘটা'-র সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে হলে প্রথমে $=\frac{u}{t}$ সূত্র প্রয়োগ করে আলোচ্য ঘটনার প্রতিকূল ঘটনার সম্ভাব্যতা বার করতে হবে তারপর সেই সম্ভাব্যতার ফলকে 1 থেকে বিয়োগ করলেই আলোচ্য সম্ভাব্যতা পাওয়া যাবে। যেমন ঃ

লুডোর ঘুঁটিকে দুবার দান দিলে অন্তত একবার পড়ার সম্ভাব্যতা কত?

এখানে অনুকূল ক্ষেত্র যদি হয় 6 পড়া তাহলে প্রতিকূল ক্ষেত্র হবে 6 না পড়া-র ক্ষেত্রগুলি। 6 না পড়তে পারে 1—5 পর্যন্ত সংখ্যার যে কোনো একটি সংখ্যা পড়লে। অতএব এখানে প্রতিকূল ফল 5

অতএব, 6 পড়ার প্রতিকূল ফল—5

প্রথম ঘুঁটিটির 6 না পড়ার সম্ভাব্যতা হল—$\frac{5}{6}$

দ্বিতীয় " " " " " "—$\frac{5}{6}$

দুটো ঘুঁটিতেই 6 না পড়ার সম্ভাব্যতা —$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

এবার এই সম্ভাব্যতার ফলকে 1 থেকে বাদ দিতে হবে।

$$1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$$

∴ লুডোর ঘুঁটিকে দুবার দান দিলে অন্তত একবার 6 পড়ার সম্ভাব্যতা $\frac{11}{36}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন জাগতে পারে কেন এমন পদ্ধতি গ্রহণ করা হয়? আসলে যে কোনো ঘটনাই হয় ঘটবে অথবা ঘটবে না। কিন্তু যে কোনো ঘটনাই ঘটবে এবং ঘটবে না এমন হয় না। S যদি কোনো ঘটনা হয় তাহলে 'S এবং ~ S' (S ঘটবে না)—এমন সম্ভাবনা O (আদৌ সম্ভাব্য নয়)। কিন্তু 'S অথবা ~ S' এই সম্ভাবনা = 1 (নিশ্চিত) কারণ S অথবা ~ S সমসম্ভাব্য তার কথা বলছে অর্থাৎ দুটি ঘটনাই সমানভাবে সম্ভাব্য এবং দুটির যৌথ ফল নিশ্চিত। এখন যদি S অথবা ~ S = 1 হয় তাহলে 1 থেকে ~ S বাদ দিলে বাকী অর্ধেক S পাব। আবার 1 থেকে S কে বাদ দিলে বাকী অর্ধেক ~ S পাব। ঠিক তেমনি ঘটনা ঘটা অথবা না ঘটার সম্ভাব্যতা হল—1 (কারণ দুটি বিকল্প সমান সম্ভাব্য) এবার অন্তত একবার ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা বার করতে গেলে 1 থেকে ঘটনা না ঘটা বাদ দিলেই বাকী অর্ধেক হিসাবে ঘটনা ঘটা বেরিয়ে আসবে। এইজন্যই অন্তত একবার ঘটা "এমন প্রশ্নের উত্তর করতে গিয়ে আগে ঘটনা না ঘটা এর সম্ভাব্যতা বার করে 1 থেকে সেই সম্ভাব্যতার ফলকে বাদ দিলেই বাকী অর্ধেক অর্থাৎ অন্তত একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতার ফল বেরিয়ে আসবে।

'অন্তত একবার ঘটা' এমন কয়েকটি সম্ভাব্যতার উদাহরণ ঃ

(1) একটি মুদ্রাকে দুবার ছুঁড়লে অন্তত একবার Head ওঠার সম্ভাব্যতা কত?

এখানে Head ওঠার প্রতিকূল ফল বা Head না ওঠার অনুকূল ফল হল—1 (Tail-এর দিকটি)

মোট বিকল্প—2

$\therefore$ প্রথমবার ছুঁড়লে H না ওঠার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$

দ্বিতীয়বার " " " " " $\frac{1}{2}$

$\therefore$ দুবারই (প্রথমবার এবং দ্বিতীয়বার) H না ওঠার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

এবার, অন্তত একবার H ওঠার সম্ভাব্যতা $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

[এই ধরনের প্রশ্ন সারণীর সাহায্যেও করা যায়। যেমন ঃ

১ম বার	২য় বার
H	H
H	T
T	H
T	T

দেখা যাচ্ছে তিনটি সারীতেই অন্তত একটি H আছে। সুতরাং এখানেও দুবার মুদ্রা ছুঁড়লে অন্ততঃ একটি H ওঠার সম্ভাব্যতা—$\frac{3}{4}$

(2) 3টি লুডোর ঘুঁটিকে একবার দান দিলে অন্তত একটিতে জোড় সংখ্যা ওঠার সম্ভাব্যতা কত?

[জোড় সংখ্য (2, 4, 6) না উঠতে পারে বিজোড় সংখ্যা (1, 3, 5) উঠলে।

লুডোর ঘুঁটিতে জোড় সংখ্যা ওঠার দিক—3

বিজোড় " " " 3]

1ম ঘুঁটিতে দান দিলে জোড় সংখ্যা না ওঠার সম্ভাব্যতা— $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

2য় " " " " " " " " $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3য় " " " " " " " " $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

তিনটি ঘুঁটিতেই জোড় সংখ্যা না ওঠার সম্ভাব্যতা—

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$\therefore$ তিনটি ঘুঁটিকে একবার দান দিলে অন্তত একবার জোড় সংখ্যা পড়ার সম্ভাব্যতা $=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ **(Ans.)**

(3) একটি তাসের বান্ডিল থেকে তিনটি তাস পরপর তুলে নিলে অন্তত একটির টেক্কা ওঠার সম্ভাব্যতা কত যদি—

(ক) তোলা তাসটি ফেরৎ দেওয়া হয়?

(খ) তোলা তাসটি ফেরৎ না দেওয়া হয়?

এখানে দুটি ধাপে উত্তর দিতে হবে।

(ক) যদি তোলা তাসটি ফেরৎ দেওয়া হয়—

সেক্ষেত্রে,

প্রতিকূল ফল 48 (টেক্কা 4টি, 52 – 4 = 48)

মোট বিকল্প 52

প্রথম তাসটির টেক্কা না হবার সম্ভাব্যতা $\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$

দ্বিতীয় ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$

[যেহেতু তাস ফেরৎ দেওয়া হয়েছে বান্ডিলে তাই প্রতিকূল ফল ও মোট বিকল্প একই রইল]

তৃতীয় তাসটির টেক্কা না হবার সম্ভাব্যতা — $\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$

∴ তিনটি টানা তাসের টেক্কা না হবার সম্ভাব্যতা—

$$\frac{12}{13}\times\frac{12}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{1728}{2197}$$

এবার তিনটি তাসের মধ্যে অন্তত একটিতে টেক্কা ওঠার সম্ভাব্যতা (যদি তোলা তাসটি বান্ডিলে ফেরৎ দেওয়া হয়)

$$1-\frac{1728}{2197}=\frac{2197-1728}{2197}=\frac{469}{2197}\quad \textbf{(Ans.)}$$

(খ) যদি তোলা তাসটি ফেরৎ না দেওয়া হয়—

[সেক্ষেত্রে প্রথমবার থেকে দ্বিতীয়বার টানা তাসটির প্রতিকূল ফল ও মোট বিকল্প দুটিই কমে আসবে।]

প্রথমবার টানা তাসটির টেক্কা না হওয়ার সম্ভাব্যতা— $\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$

ধরা যাক তাসটি টেক্কা ছিল এবং ফেরৎ দেওয়া হল না।

দ্বিতীয়বার টানা তাসটির টেক্কা না হওয়ার সম্ভাব্যতা— $\frac{47}{51}$

তৃতীয়বার টানা তাসটির টেক্কা না হওয়ার সম্ভাব্যতা — $\frac{46}{50}=\frac{23}{25}$

∴ পরপর তিনবার টেক্কা না হওয়ার সম্ভাব্যতা—

$$\frac{{}^{4}\cancel{12}}{13}\times\frac{47}{\cancel{51}_{17}}\times\frac{23}{25}=\frac{4324}{5525}$$

∴ অন্তত একবার টেক্কা ওঠার সম্ভাব্যতা (যদি তোলা তাসটি বান্ডিলে ফেরৎ না দেওয়া হয়)—

$$1-\frac{4324}{5525}=\frac{5525-4324}{5525}=\frac{1201}{5525}\quad \textbf{(Ans.)}$$

'অন্তত এক' ঘটনার সম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে যোগের সূত্রের প্রয়োগ

আমরা দেখলাম অন্তত একবার ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে যোগের সূত্র প্রয়োগ করা যায় না। কারণ যোগের সূত্রটি কেবল বিসংবাদী ঘটনার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়, কিন্তু বৈকল্পিক অবিসংবাদী ঘটনাগুলি যদি বিসংবাদিতে পরিণত করা যায়, তাহলে 'অন্তত একবার' সম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে যোগের সূত্র প্রয়োগ করা যায়। যেমন :

একটি মুদ্রাকে দুবার টস্ করলে অন্তত একবার H ওঠার সম্ভাব্যতা কত?

এখানে একটি সারণী তৈরি করে নেওয়া হল—

১ম বার	২য় বার
H	H
H	T
T	H
T	T

সারণীতে দেখা যাচ্ছে তিনটি ক্ষেত্রে অন্তত একটি H আছে। সেক্ষেত্রে আমরা লিখব H উঠতে পারে হয় প্রথম ক্ষেত্রে অথবা দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অথবা তৃতীয় ক্ষেত্রে। অর্থাৎ

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

'অন্তত এক' নামক ঘটনার ক্ষেত্রে যখন যোগের সূত্র প্রয়োগ করা হয় অর্থাৎ সরাসরি সারণী থেকে যখন সম্ভাব্যতা নির্ণয় হয় তখন সেটি প্রত্যক্ষ পদ্ধতি। আর যখন 1 থেকে আলোচ্য ঘটনার প্রতিকূল ঘটনাকে বাদ দিয়ে অন্তত এক ঘটার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা হয় তখন সেটি হল পরোক্ষ পদ্ধতি।

সম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে গুণের সূত্র ও যোগের সূত্রের একত্র প্রয়োগ (Joint application of Product and Addition Theorem)

বেশিরভাগ জটিল ঘটনার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করতে গেলে এই দুটি সূত্রকে একসাথে প্রয়োগ করতে হয়। যেমন ঃ

1. দুটি পাত্রের মধ্যে একটিতে 2টি সাদা বল, 4টি কালো বল আছে, অপরটিতে 3টি সাদা বল, 9টি কালো বল আছে, দুটি পাত্র থেকেই একটি করে বল তুলে নিলে দুটি বলেরই এক রং হবার সম্ভাব্যতা কত?

['দুটি বল এক রং হওয়া'—কথার অর্থ হল দুটি বলই সাদা অথবা দুটি বলই কালো হওয়া। এখানে বিকল্প দুটি কখনও এক সাথে সত্য হতে পারে না। কাজেই বিকল্প দুটি বিসংবাদী অতএব যোগের সূত্র প্রয়োগ করতে হবে, 'অথবা' অর্থের দ্বারাই বোঝা যাচ্ছে। কিন্তু 'দুটি বলেরই' এক রং হওয়ার অর্থ প্রথম বল এবং দ্বিতীয় বলের এক রং হওয়া। এই 'এবং' এর সম্ভাব্যতা আগে গুণের সূত্র প্রয়োগ করে বার করতে হবে, তারপর দুটি বলই সাদা অথবা দুটি কালো—এ উত্তর পাওয়ার জন্য যোগের সূত্র প্রয়োগ করতে হবে]

প্রথম পাত্রে, সাদা বল — 2
কালো বল — 4
মোট বিকল্প — 6

দ্বিতীয় পাত্রে, সাদা বল — 3
কালো বল — 9
মোট বিকল্প — 12

প্রথম পাত্রের থেকে একটি বল তুলে নিলে সেটির সাদা হবার সম্ভাব্যতা—$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

দ্বিতীয় পাত্র থেকে একটি বল তুলে নিলে সেটির সাদা হবার সম্ভাব্যতা—$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

দুটি পাত্র থেকে তোলা বল দুটির সাদা হবার সম্ভাব্যতা — $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

আবার,

প্রথম পাত্র থেকে তোলা বলের কালো হবার সম্ভাব্যতা — $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

দ্বিতীয় „ „ „ „ „ „ „ $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

দুটি পাত্র থেকে তোলা বল দুটির কালো হবার সম্ভাব্যতা $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

অতএব দুটি পাত্র থেকে একটি করে বল তুললে তোলা বল দুটির সাদা অথবা কালো হবার সম্ভাব্যতা

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1+6}{12} = \frac{7}{12}$$

∴ দুটি পাত্র থেকে একটি করে বল তুললে দুটিরই এক রং হবার সম্ভাব্যতা $= \frac{7}{12}$ **(Ans.)**

2. এক বান্ডিল তাস থেকে পরপর তিনবার একটি করে তাস তুলে নিলে তিনবারই টেক্কা অথবা সাহেব হবার সম্ভাব্যতা কত?

[এখানে তিনটি তাসের টেক্কা হওয়া এবং তিনটি তাসের সাহেব হওয়ার সম্ভাব্যতা আলাদা করে গুণের সূত্র দিয়ে বার করে নিতে হবে। তারপর টেক্কা অথবা সাহেব হবার সম্ভাব্যতা যোগের সূত্র দিয়ে বার করতে হবে।]

এখানে, অনুকূল ফল (টেক্কার সংখ্যা) — 4

মোট বিকল্প — 52

প্রথমবার টানা তাসটির টেক্কা হবার সম্ভাব্যতা— $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

দ্বিতীয়বার „ „ „ „ „ — $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

তৃতীয়বার „ „ „ „ „ — $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

∴ পরপর তিনবার টানা তাসের টেক্কা হবার সম্ভাব্যতা — $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{2197}$

একইভাবে

পরপর তিনবার টানা তাসের সাহেব হবার সম্ভাব্যতা— $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{2197}$

∴ তিনটি তাসেরই টেক্কা অথবা সাহেব হবার সম্ভাব্যতা

$$\frac{1}{2197} + \frac{1}{2197} = \frac{1+1}{2197} = \frac{2}{2197}$$

∴ পরপর তিনবার তাস তুলে নিলে তিনবারই টেক্কা অথবা সাহেব হবার সম্ভাব্যতা— $\frac{2}{2197}$ **(Ans.)**

3. একটি মেলায় একইরকম পাঁচটি প্রবেশপথ করা হয়েছে। মেলা দেখতে আসা তিনজন বন্ধুর